

全品



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

2021-2025

高考真题 考点突破

全国
适用

AI
智慧
教辅

一流选题
一流精析

主 编 肖德好



- 全题目AI精讲
- 重点题优师精讲
- 个性化错题本
- 配套真题原卷

考向追踪

数学

长江出版传媒

崇文书局

为什么高考前一定要刷高考真题？

真题是高考复习备考的“黄金资料”，核心价值在于：

靶向性

精准对接高考考点，直击命题核心，避免复习偏离方向。

规范性

“原汁原味”呈现高考命题方式与难度，是模拟题无法替代的“标准模板”。

创新性

蕴含近年命题趋势与新情境，能提前适应高考的灵活变化。

刷对真题，才能实现**高效复习、精准提分、快速提升**应试能力。

刷真题，为什么选择《考向追踪》？

分类精选，告别题海

从2021-2025年近百套真题中，深度精炼热点情境与核心考向。甄选高频易错题、创新性试题，让你每一道题都刷在考点上，不做无用功。

拆解思维，告别“玄学”

不止给出标准答案与解析，更同步拆解解题逻辑，给出考场专属的“找题眼、破思路”引导。让你每一道题都悟在关键上，掌握可复制的解题方法。

伴学答疑，告别模糊

配备AI讲题、真人讲题、真题原卷（2021-2025电子真题）、个性化错题本四大辅助工具，为个性化答疑、反复复盘巩固提供方案。让你每一道真题都学到彻底懂，不留知识盲区。



错题本



AI讲题



真题精讲



真题原卷

CONTENTS 目录

第一部分 追踪五年真题视角

主题一 集合、常用逻辑用语与不等式

考点 1 集合	001	127
考点 2 常用逻辑用语	004	128
考点 3 不等式	006	131

主题二 函数、导数及其应用

考点 4 函数的概念及其表示	007	134
考点 5 函数的基本性质	008	136
考点 6 幂函数、指数函数、对数函数	011	142
考点 7 导数的概念及其几何意义	012	145
考点 8 导数的应用	013	146
考点 9 函数的图象	016	154
考点 10 函数与数学模型	018	155
考点 11 函数的零点	019	156
专题一 利用导数研究恒成立、能成立求参问题	021	160
专题二 导数与不等式	022	162
专题三 零点、极值点相关的证明	023	164
专题四 三角函数与导数	026	168

主题三 三角函数、解三角形

考点 12 三角函数的概念、同角三角函数关系式与诱导公式	027	171
考点 13 三角恒等变换	028	173
考点 14 三角函数的图象与性质	029	175
考点 15 正弦定理及其应用	033	177
专题五 解三角形中几何图形问题	037	179

主题四 平面向量与复数

考点 16 平面向量的概念与运算	038	181
考点 17 平面向量的应用	040	183
考点 18 复数	041	188

真题考向追踪

高考分析

类型一 知识本源

特点：理解并挖掘知识的深度与覆盖面，加强自身思维训练，有效链接其他知识点

- 【2021·全国乙卷文，题 8】/P132；
【2015·浙江卷理，题 7】/P134；
【2021·全国乙卷，文 9、理 4】/P138；
【2024·北京卷，题 9】/P144；
【2024·北京卷，题 12】/P172；
【2024·新课标Ⅱ卷，题 9】/P176；
【2024·新课标Ⅱ卷，题 5】/P250；
【2022·新高考全国Ⅰ卷，题 22】/P295.

类型二 考教衔接

特点：高考试题大多都可以在教材中找到原型，是教材例题、习题经过加工、整合、迁移与演变而成的

- 【2022·新高考全国Ⅰ卷，题 7】/P152；
【2024·新课标Ⅰ卷，题 4】/P173；
【2024·新课标Ⅰ卷，题 7】/P175；
【2025·全国二卷，题 15】/P177；
【2025·全国一卷，题 6】/P183；
【2025·全国一卷，题 13】/P196；
【2024·新课标Ⅱ卷，题 5】/P250；
【2022·全国甲卷理，题 10】/P251；
【2024·新课标Ⅰ卷，题 12】/P256；
【2024·新课标Ⅰ卷，题 18】/P295.

类型三 考情分析

特点：分析近两年高考题的命题背景和高考试题评析，强调“多想少算”“新颖情境”“融会贯通”，拓展思维的深度和广度

- 【2022·全国乙卷文，题 16】/P139；
【2025·全国二卷，题 10】/P142；
【2025·全国一卷，题 6】/P183；
【2025·全国一卷，题 17】/P225.

主题五 数列

	正文页码	答案页码
考点 19 等差数列	043	190
考点 20 等比数列	045	195
考点 21 数列递推	046	198
考点 22 数列求和	047	203
专题六 数列的综合问题	049	207

主题六 立体几何

	正文页码	答案页码
考点 23 空间几何体的结构与度量	053	210
考点 24 空间中的位置关系	057	217
考点 25 空间角	060	224
考点 26 空间距离	066	232
考点 27 折叠与探索问题	067	235
专题七 空间几何体与球	069	239
专题八 立体几何中的动态问题	070	243

主题七 解析几何

	正文页码	答案页码
考点 28 直线与圆	071	247
考点 29 椭圆的定义、标准方程与几何性质	073	250
考点 30 双曲线的定义、标准方程与几何性质	075	254
考点 31 抛物线的定义、标准方程与几何性质	077	260
专题九 圆锥曲线的综合问题（一）弦长、面积有关的求值、范围、证明问题	079	264
专题十 圆锥曲线的综合问题（二）定点、定值、定直线问题	084	270

主题八 统计、概率

	正文页码	答案页码
考点 32 统计	089	275
考点 33 排列与组合	095	277
考点 34 二项式定理	097	279
考点 35 概率	098	281
考点 36 随机变量及其分布	101	284
专题十一 概率热点解答题专练	105	290

第二部分 构建十年真题网络

专题十二 函数、导数与其他模块交汇	108	293
专题十三 数列与其他模块交汇	112	300
专题十四 立体几何与其他模块交汇	117	305
专题十五 圆锥曲线与其他模块交汇	118	310
专题十六 统计概率与其他模块交汇	121	313

真题解题技巧

多维破题

1. 一题多解

【2024·新课标Ⅰ卷，题13】/P146；
【2024·新课标Ⅱ卷，题16】/P148；
【2025·全国一卷，题4】/P175；
【2023·全国乙卷，理11、文12】/P259；
【2025·全国一卷，题10】/P263
... ..

2. 齐次化

【2021·浙江卷，题22】/P168；
【2021·新高考全国Ⅰ卷，题6】/P171；
【2021·浙江卷，题16】/P253；
... ..

3. 构造法

【2022·新高考全国Ⅰ卷，题7】/P152；
【2022·全国甲卷理，题12】/P153；
【2023·新课标Ⅰ卷，题19】/P162；
【2022·新高考全国Ⅰ卷，题22】/P299
... ..

4. 射影定理

【2023·全国乙卷文，题4】/P178；
【2025·天津卷，题17】/P230；
【2021·全国甲卷理，题19】/P238
... ..

5. 特值法

【2020·全国卷Ⅰ理，题12】/P136；
【2021·新高考全国Ⅱ卷，题8】/P140；
【2024·全国甲卷文，题5】/P190；
【2025·全国一卷，题3】/P256
... ..

6. 定性分析与定量计算

【2023·上海卷，题16】/P130；
【2025·全国一卷，题17】/P224；
【2024·新课标Ⅱ卷，题17】/P236
... ..

7. 方法拓展

【2025·天津卷，题15】/P131；
【2021·新高考全国Ⅰ卷，题13】/P138；
【2024·全国甲卷理，题21】/P162；
【2023·新课标Ⅰ卷，题15】/P177；
【2024·新课标Ⅱ卷，题3】/P183
... ..

8. 易错提醒

【2022·新高考全国Ⅰ卷，题15】/P145；
【2021·全国乙卷理，题19】/P199；
【2023·全国甲卷理，题17】/P200；
【2023·全国乙卷理，题12】/P250
... ..

考点1 集合

难度:★★

聚焦:集合的含义及其关系、方程与不等式、集合间运算

■题组一 集合的含义及关系

» 答案: 127页

1. [2024·全国甲卷文,题2,5分] 若集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$, $B=\{x|x+1\in A\}$, 则 $A\cap B=$ ()

- A. $\{1,3,4\}$
B. $\{2,3,4\}$
C. $\{1,2,3,4\}$
D. $\{0,1,2,3,4,9\}$

2. [2023·新课标Ⅱ卷,题2,5分] 设集合 $A=\{0,-a\}$, $B=\{1,a-2,2a-2\}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $a=$ ()

- A. 2
B. 1
C. $\frac{2}{3}$
D. -1

3. [2023·上海卷,题13,4分] 已知 $P=\{1,2\}$, $Q=\{2,3\}$, 若 $M=\{x|x\in P \text{ 且 } x\notin Q\}$, 则 $M=$ ()

- A. $\{1\}$
B. $\{2\}$
C. $\{3\}$
D. $\{1,2,3\}$

4. [2022·全国乙卷理,题1,5分] 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$, 则 ()

- A. $2\in M$
B. $3\in M$
C. $4\notin M$
D. $5\notin M$

5. [2021·全国乙卷理,题2,5分] 已知集合 $S=\{s|s=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, $T=\{t|t=4n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $S\cap T=$ ()

- A. $\emptyset$
B. S
C. T
D. $\mathbf{Z}$

6. [2023·全国甲卷理,题1,5分] 设全集 $U=\mathbf{Z}$, 集合 $M=\{x|x=3k+1, k\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=3k+2, k\in\mathbf{Z}\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ ()

- A. $\{x|x=3k, k\in\mathbf{Z}\}$
B. $\{x|x=3k-1, k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{x|x=3k-2, k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\emptyset$

7. [2020·全国卷Ⅲ理,题1,5分] 已知集合 $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{N}^*, y\geq x\}$, $B=\{(x,y)|x+y=8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ()

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

■题组二 集合的运算

» 答案: 127页

8. [2025·北京卷,题1,4分] 集合 $M=\{x|2x-1>5\}$, $N=\{1,2,3\}$, 则 $M\cap N=$ ()

- A. $\{1,2,3\}$
B. $\{2,3\}$
C. $\{3\}$
D. $\emptyset$

9. [2025·全国一卷,题2,5分] 已知集合 $U=\{x|x \text{ 是小于9的正整数}\}$, $A=\{1,3,5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ()

- A. 2
B. 3
C. 5
D. 8

10. [2025·全国二卷,题3,5分] 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$, $B=\{x|x^3=x\}$, 则 $A\cap B=$ ()

- A. $\{0,1,2\}$
B. $\{1,2,8\}$
C. $\{2,8\}$
D. $\{0,1\}$

11. [2024·天津卷,题1,5分] 集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$ ()

- A. $\{1,2,3,4\}$
B. $\{2,3,4\}$
C. $\{2,4\}$
D. $\{1\}$

12. [2024·北京卷,题1,4分] 已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$, $N=\{x|-1\leq x<4\}$, 则 $M\cup N=$ ()

- A. $\{x|-1\leq x<1\}$
B. $\{x|x>-3\}$
C. $\{x|-3<x<4\}$
D. $\{x|x<4\}$

13. [2022·上海卷,题13,4分] 若集合 $A=[-1,2)$, $B=\mathbf{Z}$, 则 $A\cap B=$ ()

- A. $\{-2,-1,0,1\}$
B. $\{-1,0,1\}$
C. $\{-1,0\}$
D. $\{-1\}$

14. [2021·新高考全国Ⅰ卷,题1,5分] 设集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$
C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

15. [2021·全国甲卷文,题1,5分] 设集合 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N = \{x | 2x > 7\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{7, 9\}$ B. $\{5, 7, 9\}$
C. $\{3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

16. [2024·新课标Ⅰ卷,题1,5分] 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$
C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

17. [2022·全国乙卷文,题1,5分] 集合 $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $N = \{x | -1 < x < 6\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{2, 4, 6\}$
C. $\{2, 4, 6, 8\}$ D. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

18. [2023·北京卷,题1,4分] 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}$, $N = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 1\}$
C. $\{x | x \geq -2\}$ D. $\{x | x < 1\}$

19. [2021·浙江卷,题1,4分] 设集合 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | x > -1\}$
B. $\{x | x \geq 1\}$
C. $\{x | -1 < x < 1\}$
D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

20. [2021·全国甲卷理,题1,5分] 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\left\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$
B. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$
C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$
D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

21. [2022·全国甲卷文,题1,5分] 设集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\right\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$
C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

22. [2022·新高考全国Ⅱ卷,题1,5分] 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x | |x - 1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$

23. [2021·北京卷,题1,4分] 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -1 < x < 2\}$
B. $\{x | -1 < x \leq 2\}$
C. $\{x | 0 \leq x < 1\}$
D. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

24. [2022·北京卷,题1,4分] 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $(-2, 1]$
B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$
C. $[-2, 1)$
D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$

25. [2021·天津卷,题1,5分] 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 3, 5\}$
C. $\{0, 1, 2, 4\}$ D. $\{0, 2, 3, 4\}$

26. [2022·新高考全国Ⅰ卷,题1,5分] 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$
B. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 2\right\}$
C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$
D. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$

27. [2023·新课标Ⅰ卷,题1,5分] 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

28. [2024·全国甲卷理,题2,5分] 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()

- A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$
C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

29. [2023·全国甲卷文,题1,5分] 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 4\}$, $N = \{2, 5\}$, 则 $N \cup (\complement_U M) =$ ()

- A. $\{2, 3, 5\}$ B. $\{1, 3, 4\}$
C. $\{1, 2, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$

30. [2021·全国乙卷文,题1,5分] 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) =$ ()

- A. $\{5\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

31. [2021·新高考全国II卷,题2,5分] 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{3\}$ B. $\{1, 6\}$
C. $\{5, 6\}$ D. $\{1, 3\}$

32. [2025·天津卷,题1,5分] 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
C. $\{2, 4\}$ D. $\{4\}$

33. [2022·天津卷,题1,5分] 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 2\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{-1, 1, 2\}$ D. $\{0, -1, 1, 2\}$

34. [2023·全国乙卷文,题2,5分] 设全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 集合 $M = \{0, 4, 6\}$, $N = \{0, 1, 6\}$, 则 $M \cup (\complement_U N) =$ ()

- A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$
C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. U

35. [2022·全国甲卷理,题3,5分] 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{1, 3\}$ B. $\{0, 3\}$
C. $\{-2, 1\}$ D. $\{-2, 0\}$

36. [2023·全国乙卷理,题2,5分] 设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 则 $\{x \mid x \geq 2\} =$ ()

- A. $\complement_U(M \cup N)$
B. $N \cup (\complement_U M)$
C. $\complement_U(M \cap N)$
D. $M \cup (\complement_U N)$

37. [2021·上海卷,题2,4分] 已知 $A = \{x \mid 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

■题组三 集合语言的应用

»答案: 128页

38. [2020·全国新高考I卷,题5,5分] 某中学的学生积极参加体育锻炼,其中有96%的学生喜欢足球或游泳,60%的学生喜欢足球,82%的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ()

- A. 62% B. 56%
C. 46% D. 42%

39. [2020·浙江卷,题10,4分] 设集合 S, T , $S \subseteq \mathbf{N}^*$, $T \subseteq \mathbf{N}^*$, S, T 中至少有2个元素,且 S, T 满足:

- ①对于任意的 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 则 $xy \in T$;
②对于任意的 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$.

下列命题正确的是 ()

- A. 若 S 有4个元素, 则 $S \cup T$ 有7个元素
B. 若 S 有4个元素, 则 $S \cup T$ 有6个元素
C. 若 S 有3个元素, 则 $S \cup T$ 有5个元素
D. 若 S 有3个元素, 则 $S \cup T$ 有4个元素

考点2 常用逻辑用语

难度:★★

聚焦:数学概念内涵与外延的理解、存在量词命题与全称量词命题的相互关系

■ 题组一 充分条件与必要条件

» 答案: 128页

1. [2025·天津卷,题2,5分] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x=0$ ”是“ $\sin 2x=0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

2. [2024·天津卷,题2,5分] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a^3=b^3$ ”是“ $3^a=3^b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

3. [2023·天津卷,题2,5分] “ $a^2=b^2$ ”是“ $a^2+b^2=2ab$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分又不必要条件

4. [2021·天津卷,题2,5分] 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a>6$ ”是“ $a^2>36$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

5. [2024·全国甲卷理,题9,5分] 设向量 $a=(x+1, x)$, $b=(x, 2)$, 则 ()

- A. $x=-3$ 是 $a \perp b$ 的必要条件
- B. $x=-3$ 是 $a \parallel b$ 的必要条件
- C. $x=0$ 是 $a \perp b$ 的充分条件
- D. $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $a \parallel b$ 的充分条件

6. [2021·浙江卷,题3,4分] 已知非零向量 a, b, c , 则“ $a \cdot c=b \cdot c$ ”是“ $a=b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

7. [2023·北京卷,题8,4分] 若 $xy \neq 0$, 则“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

8. [2024·北京卷,题5,4分] 设 a, b 是向量, 则“ $(a+b) \cdot (a-b)=0$ ”是“ $a=b$ 或 $a=-b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

9. [2023·全国甲卷理,题7,5分] 设甲: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 乙: $\sin \alpha + \cos \beta = 0$, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

10. [2021·北京卷,题3,4分] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

题组二 全称量词与存在量词

11. [2023 · 新课标 I 卷, 题 7, 5 分] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

12. [2021 · 全国甲卷理, 题 7, 5 分] 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n . 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

13. [2022 · 北京卷, 题 6, 4 分] 设 $\{a_n\}$ 是公差 $d \neq 0$ 的无穷等差数列, 则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

14. [2024 · 上海卷, 题 15, 5 分] 已知集合 Ω 是空间直角坐标系内的点集, O 为坐标原点, 任取 $P_1, P_2, P_3 \in \Omega$, 均存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3} = \mathbf{0}$. 已知 $(1, 0, 0) \in \Omega$, 则 $(0, 0, 1) \notin \Omega$ 的一个充分条件是 ()

- A. $(0, 0, 0) \in \Omega$
- B. $(-1, 0, 0) \in \Omega$
- C. $(0, 1, 0) \in \Omega$
- D. $(0, 0, -1) \in \Omega$

15. [2015 · 全国卷 I 理, 题 3, 5 分] 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$
- B. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
- C. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
- D. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$

16. [2024 · 新课标 II 卷, 题 2, 5 分] 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()

- A. p 和 q 都是真命题
- B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
- C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
- D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

17. [2022 · 上海卷, 题 16, 5 分] 设集合 $\Omega = \{(x, y) | (x-k)^2 + (y-k^2)^2 = 4|k|, k \in \mathbf{Z}\}$.

- ① 存在直线 l , 使得集合 Ω 中不存在点在 l 上, 而存在点在 l 两侧;
- ② 存在直线 l , 使得集合 Ω 中存在无数点在 l 上. 则 ()

- A. ①成立, ②成立
- B. ①成立, ②不成立
- C. ①不成立, ②成立
- D. ①不成立, ②不成立

18. [2023 · 上海卷, 题 16, 5 分] 已知 P, Q 是曲线 Γ 上两点, 若存在 M 点, 使得对曲线 Γ 上任意一点 P , 都存在 Q 使得 $|MP| \cdot |MQ| = 1$, 则称曲线 Γ 是“自相关曲线”. 现有如下两个命题: ① 任意椭圆都是“自相关曲线”; ② 存在双曲线是“自相关曲线”. 则 ()

- A. ①是真命题, ②是真命题
- B. ①是真命题, ②是假命题
- C. ①是假命题, ②是真命题
- D. ①是假命题, ②是假命题

考点3 不等式

难度:★★

聚焦:基本不等式代数结构识别和代数结构变形

■题组一 不等式的运算

»答案: 131页

1. [2025·全国二卷,题4,5分] 不等式

$$\frac{x-4}{x-1} \geq 2 \text{ 的解集是 } (\quad)$$

- A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$
B. $\{x | x \leq -2\}$
C. $\{x | -2 \leq x < 1\}$
D. $\{x | x > 1\}$

2. [2025·上海卷,题2,4分] 不等式 $\frac{x-1}{x-3} < 0$ 的解集为_____.

3. [2024·上海卷,题3,4分] 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为_____.

4. [2023·上海卷,题1,4分] 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为_____.

5. [2025·天津卷,题15,5分] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 对任意 $x \in [-2, 2]$, 均有 $(2a+b)x^2 + bx - a - 1 \leq 0$ 成立, 则 $2a+b$ 的最小值为_____.

■题组二 基本不等式

»答案: 131页

6. [2025·北京卷,题6,4分] 已知 $a > 0, b > 0$, 则 ()

- A. $a^2 + b^2 > 2ab$
B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$
C. $a + b > \sqrt{ab}$
D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$

7. [2022·上海卷,题14,4分] 若实数 a, b 满足 $a > b > 0$, 则下列不等式中恒成立的是 ()

- A. $a + b > 2\sqrt{ab}$
B. $a + b < 2\sqrt{ab}$
C. $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$
D. $\frac{a}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$

8. [2021·全国乙卷文,题8,5分] 下列函数中最小值为4的是 ()

- A. $y = x^2 + 2x + 4$
B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
C. $y = 2^x + 2^{2-x}$
D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

9. [2021·浙江卷,题8,4分] 已知 α, β, γ 是互不相同的锐角, 则在 $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$ 三个值中, 大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值是 ()

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

10. [2021·上海卷,题16,5分] 两两不同的 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 满足 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$, 且满足 $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3, x_1 y_1 + x_3 y_3 = 2x_2 y_2 > 0$, 下列选项一定成立的是 ()

- A. $x_1 + x_3 > 2x_2$
B. $x_1 + x_3 < 2x_2$
C. $x_1 x_3 > x_2^2$
D. $x_1 x_3 < x_2^2$

11. (多选题) [2020·全国新高考I卷,题11,5分] 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

- A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$
B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$
D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. (多选题) [2022·新高考全国II卷,题12,5分] 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

- A. $x + y < 1$
B. $x + y \geq -2$
C. $x^2 + y^2 \geq 1$
D. $x^2 + y^2 \leq 2$

13. [2025·上海卷,题8,5分] 设 $a, b > 0, a + \frac{1}{b} = 1$, 则 $b + \frac{1}{a}$ 的最小值为_____.

14. [2021·天津卷,题13,5分] 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为_____.

主题二 函数、导数及其应用

考点4 函数的概念及其表示

难度:★★

聚焦:对应关系、函数与方程、解不等式

■题组一 函数的定义域、解析式

» 答案: 134页

1. [2016·全国卷Ⅱ文,题10,5分] 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ()

- A. $y=x$ B. $y=\lg x$
C. $y=2^x$ D. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. [2025·北京卷,题7,4分] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,则“函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ”是“对任意 $M \in \mathbf{R}$,存在 $x_0 \in D$,使得 $|f(x_0)| > M$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. [2015·浙江卷理,题7,5分] 存在函数 $f(x)$ 满足:对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 ()

- A. $f(\sin 2x) = \sin x$
B. $f(\sin 2x) = x^2 + x$
C. $f(x^2 + 1) = |x + 1|$
D. $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

4. [2015·浙江卷文,题8,5分] 设实数 a, b, t 满足 $|a+1| = |\sin b| = t$. ()

- A. 若 t 确定,则 b^2 唯一确定
B. 若 t 确定,则 $a^2 + 2a$ 唯一确定
C. 若 t 确定,则 $\sin \frac{b}{2}$ 唯一确定
D. 若 t 确定,则 $a^2 + a$ 唯一确定

5. [2022·北京卷,题11,5分] 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

6. [2021·上海卷,题5,4分] 已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$,则 $f^{-1}(1) =$ _____.

7. [2022·上海卷,题12,5分] 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right)$,定义域为 $D = [0,$

$+\infty)$,值域为 A ,若集合 $\{y | y = f(x), x \in [0, a]\}$ 可取得 A 中所有值,则参数 a 的取值范围为_____.

■题组二 分段函数

» 答案: 135页

8. [2015·湖北卷文,题7,5分] 设 $x \in \mathbf{R}$,定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则 ()

- A. $|x| = x |\operatorname{sgn} x|$
B. $|x| = x \operatorname{sgn} |x|$
C. $|x| = |x| \operatorname{sgn} x$
D. $|x| = x \operatorname{sgn} x$

9. [2018·全国卷Ⅰ文,题12,5分] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$
C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

10. [2024·上海卷,题2,4分] 已知 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(3) =$ _____.

11. [2021·浙江卷,题12,4分] 已知 $a \in \mathbf{R}$,函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2, \\ |x - 3| + a, & x \leq 2. \end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6})) = 3$,则 $a =$ _____.

12. [2022·浙江卷,题14,6分] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq 1, \\ x + \frac{1}{x} - 1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$ _____;若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leq f(x) \leq 3$,则 $b - a$ 的最大值是_____.

13. [2017·全国卷Ⅲ理,题15,5分] 设函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是_____.

考点5 函数的基本性质

难度:★★

聚焦:函数单调性、奇偶性的定义;函数结构的识别、判断函数单调性、奇偶性的方法;函数奇偶性、对称性、周期性递推关系;抽象函数与数学知识拓展联想

■题组一 函数的单调性与最值

»答案: 136页

1. [2023·北京卷,题4,4分] 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

A. $f(x) = -\ln x$

B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$

C. $f(x) = -\frac{1}{x}$

D. $f(x) = 3^{1-x-1}$

2. [2021·全国甲卷文,题4,5分] 下列函数中是增函数的为 ()

A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. [2023·新课标I卷,题4,5分] 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减,则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$

C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

4. [2024·新课标I卷,题6,5分] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$

C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

5. [2020·全国卷I理,题12,5分] 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则 ()

A. $a > 2b$ B. $a < 2b$

C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

6. [2023·上海卷,题5,4分] 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是 _____.

7. [2022·北京卷,题14,5分] 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax + 1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值,则 a 的一个取值为 _____; a 的最大值为 _____.

■题组二 函数的奇偶性

»答案: 137页

8. [2023·新课标II卷,题4,5分] 若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数,则 $a =$ ()

A. -1 B. 0

C. $\frac{1}{2}$ D. 1

9. [2024·天津卷,题4,5分] 下列函数是偶函数的是 ()

A. $y = \frac{e^x - x^2}{x^2 + 1}$ B. $y = \frac{\cos x + x^2}{x^2 + 1}$

C. $y = \frac{e^x - x}{x + 1}$ D. $y = \frac{\sin x + 4x}{e^{|x|}}$

10. [2022·北京卷,题4,4分] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$, 则对任意实数 x , 有 ()

A. $f(-x) + f(x) = 0$

B. $f(-x) - f(x) = 0$

C. $f(-x) + f(x) = 1$

D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$

■ 题组三 函数的奇偶性、单调性、对称性与周期性

11. [2021·全国乙卷,文9、理4,5分] 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()

- A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$
C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$

12. [2023·全国乙卷理,题4,5分] 已知 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数, 则 $a =$ ()

A. -2 B. -1
C. 1 D. 2

13. [2024·上海卷,题4,4分] 已知 $f(x) = x^3 + a$, $x \in \mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.

14. [2023·全国甲卷,理13、文14,5分] 若 $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

15. [2021·新高考全国I卷,题13,5分] 已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

16. [2022·上海卷,题8,5分] 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x-1, & x < 0, \\ x+a, & x > 0, \end{cases}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ _____.

17. [2022·全国乙卷文,题16,5分] 若 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

18. [2021·上海卷,题13,5分] 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ()

- A. $y = -3x$ B. $y = x^3$
C. $y = \log_3 x$ D. $y = 3^x$

19. [2025·全国一卷,题5,5分] 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为2的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则 $f\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

20. [2023·全国甲卷文,题11,5分] 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$, 记 $a = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 则 ()

A. $b > c > a$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

21. [2021·全国甲卷文,题12,5分] 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right) =$ ()

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

22. [2021·新高考全国II卷,题8,5分] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 是偶函数, $f(2x+1)$ 是奇函数, 则 ()

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ B. $f(-1) = 0$
C. $f(2) = 0$ D. $f(4) = 0$

23. [2022·新高考全国Ⅱ卷,题8,5分] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$, $f(1)=1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$
- A. -3 B. -2
C. 0 D. 1

24. [2021·全国甲卷理,题12,5分] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) = (\quad)$
- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

25. [2022·全国乙卷理,题12,5分] 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$, 若 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $g(2)=4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$
- A. -21 B. -22
C. -23 D. -24

26. [2024·上海卷,题16,5分] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义集合 $M = \{x_0 | x_0 \in \mathbf{R}, x \in (-\infty, x_0), f(x) < f(x_0)\}$, 在使得 $M = [-1, 1]$ 的所有 $f(x)$ 中, 下列成立的是 $(\quad)$
- A. 存在 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 是偶函数
B. 存在 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 的最大值是 $f(2)$
C. 存在 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 严格递增
D. 存在 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极小值

27. (多选题)[2025·全国二卷,题10,6分] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 $(\quad)$
- A. $f(0) = 0$
B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
C. $f(x) \geq 2$, 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$
D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

28. (多选题)[2023·新课标Ⅰ卷,题11,5分] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 $(\quad)$
- A. $f(0) = 0$
B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数
D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

29. [2025·北京卷,题15,5分] 关于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$, 以下说法正确的有 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- ①存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立;
②存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立;
③使得 $f(x) + f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个;
④使得 $f(x) - f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

专题一 利用导数研究恒成立、能成立求参问题

» 答案: 160页

难度:★★★★

聚焦:参数不同时,函数的性质与特征不同,研究不同情况下参数的范围

1. [2021·天津卷,题20,16分] 已知函数 $f(x) = ax - xe^x$ ($a > 0$).

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)证明 $f(x)$ 有且仅有一个极值点;

(3)若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

2. [2024·全国甲卷理,题21,12分] 已知函数 $f(x) = (1 - ax)\ln(1 + x) - x$.

(1)若 $a = -2$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2)当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

专题二 导数与不等式

» 答案: 162页

难度:★★★★

聚焦:研究函数的最值或改变不等式的特征,构建可以探求最值的函数结构

1. [2023·新课标Ⅰ卷,题19,12分] 已知函数

$$f(x) = a(e^x + a) - x.$$

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

2. [2021·全国乙卷理,题20,12分] 设函数

$f(x) = \ln(a - x)$, 已知 $x = 0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1)求 a ;

(2)设函数 $g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.

3. [2022·新高考全国Ⅱ卷,题22,12分] 已知

$$f(x) = xe^{ax} - e^x.$$

(1)当 $a = 1$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求实数 a 的取值范围;

(3)设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots +$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1).$$

专题三 零点、极值点相关的证明

» 答案: 164页

难度:★★★★

聚焦:聚焦最值和构造函数,并充分利用变量的关系进行减元、

换元等构建新函数解决问题

1. [2022·全国甲卷理,题21,12分] 已知函数

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a.$$

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

2. [2025·全国二卷,题18,17分] 已知函数

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, \text{ 其中 } 0 <$$

$$k < \frac{1}{3}.$$

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的极值点和唯一的零点.

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的极值点和零点.

(i) 设函数 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$, 证明: $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减;

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

3. [2025·北京卷,题20,15分] 已知函数

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \text{ 直线 } l_1 \text{ 为曲线 } y = f(x) \text{ 在}$$

$A(a, f(a)) (a \neq 0)$ 处的切线.

(1) 求导函数 $f'(x)$ 的最大值;

(2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 求证: 除切点 A 外, $y = f(x)$ 的图象在 l_1 上方;

(3) 当 $a > 0$ 时, 直线 l_2 过 A 且与 l_1 垂直, l_1, l_2 与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 求

$$\frac{2a - x_1 - x_2}{x_2 - x_1} \text{ 的取值范围.}$$

4. [2025 · 天津卷, 题 20, 16 分] 已知函数 $f(x) = ax - (\ln x)^2$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 已知 $f(x)$ 有 3 个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$.

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 证明: $(\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$.

5. [2024 · 天津卷, 题 20, 16 分] 设函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \geq a(x - \sqrt{x})$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 证明 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}}$.

6. [2021·新高考全国Ⅰ卷,题22,12分] 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

7. [2021·浙江卷,题22,15分] 设 a, b 为实数, 且 $a > 1$, 函数 $f(x) = a^x - bx + e^2 (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对任意 $b > 2e^2$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;

(3) 当 $a = e$ 时, 证明: 对任意 $b > e^4$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 满足 $x_2 > \frac{b \ln b}{2e^2} x_1 + \frac{e^2}{b}$.

(注: $e = 2.718\ 28\cdots$ 是自然对数的底数)

专题四 三角函数与导数

» 答案: 168页

难度:★★★★

聚焦:三角函数与高次函数、指数对数函数;与三角函数有关的

单调性、周期性和有界性;三角放缩

1. [2023·全国甲卷理,题21,12分] 已知

$$f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- (1) 当 $a=8$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x) < \sin 2x$, 求 a 的取值范围.

2. [2023·新课标Ⅱ卷,题22,12分] (1) 证明:

当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1-x^2)$, 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

3. [2020·全国卷Ⅱ理,题21,12分] 已知函数

$$f(x) = \sin^2 x \sin 2x.$$

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots$

$$\sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}.$$

